BULLETIN OF THE BRAZILIAN MATHEMATICAL SOCIETY

Bull Braz Math Soc, New Series 37(1), 29-48

Classes polaires associées aux distributions holomorphes de sous-espaces tangents*

Rogério S. Mol

Résumé. Nous définissons des classes polaires associées à une distribution holomorphe singulière de sous-espaces tangents d'une variété projective lisse. Nous prouvons que ces classes polaires peuvent être calculées en fonction des classes de Chern-Mather du faisceau tangent de la distribution et réciproquement. Nous utilisons leurs degrés pour borner les degrés de certaines classes polaires associés à une variété invariante.

Mots-clés: Feuilletages holomorphes, classes polaires, cycles de Schubert, classes de Chern, variétés invariantes.

Abstract. We define polar classes associated to a singular holomorphic distribution of tangent subspaces of a projective manifold. We prove that these polar classes can be calculated in terms of the Chern-Mather classes of the tangent sheaf of the distribution and reciprocally. We use their degrees to establish a bound for the degrees of some polar classes associated to an invariant variety.

Keywords: holomorphic foliations, polar classes, Schubert cycles, Chern classes, invariant varieties.

Mathematical subject classification: Primary: 32S65; Secondary: 14M15.

1 Introduction

Soit $M \subset \mathbb{P}^n$ une variété analytique complexe, éventuellement singulière, de dimension m. On note $\mathrm{Sing}(M)$ son ensemble singulier. Soit

$$\mathcal{D} : L_n \subset L_{n-1} \subset \cdots \subset L_j \subset \cdots L_1 \subset L_0 = \mathbb{P}^n \tag{$*$}$$

un drapeau de sous-espaces linéaires de $\mathbb{P}^n$, où $\mathrm{codim}\, L_j = j$. Dans ce travail, "dim" et "codim" se rapportent, respéctivement, aux dimensions et codimensions

Received 10 August 2005.

*Ce travail a été soutenu par l'Accord de Coopération France-Brésil (CNRS/CNPq) et par la Fondation CAPES-Brésil.

complexes. En chaque point lisse $x \in M$, l'espace tangent complexe à M est bien défini et correspond à un sous-espace linéaire de dimension m de $\mathbb{P}^n$. On l'appelle *espace tangent projectif* à M en x, et on le note $T_x^{\mathbb{P}}M$. L'ensemble

$$P_k \ = \ Adh\{x \in M \setminus \mathrm{Sing}(M);\ \dim(T_x^{\mathbb{P}}M \cap L_{m-k+2}) \geq k-1\},$$

où l'adhérence Adh est prise dans M, s'appelle le k-ième *lieu polaire* de M par rapport au drapeau $\mathcal{D}$ (voir [LT] et [Pi]). On remarque que le lieu polaire est la clotûre de l'ensemble des points où le plan de codimension $m-k+2$ du drapeau et la variété M ne son pas transverses.

R. Piene [Pi] a démontré que, si L_{m-k+2} est suffisamment générique dans la grassmannienne des $n-(m-k+2)$-plans de $\mathbb{P}^n$, alors P_k est une variété analytique de codimension k dont la classe dans le groupe de Chow $A_{m-k}(M)$ est bien définie. Cette classe, notée $[P_k]$, s'appelle la k-ième *classe polaire* de M. R. Piene a aussi prouvé la formule de Todd, qui relie les classes polaires et les classes de Chern-Mather de la variété M, notés $c_\bullet^M(M)$:

$$[P_k] \ = \ \sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{m+1-k+i}{i} c^1(\mathcal{O}(1)_{|M})^i \cap c^M_{m-k+i}(M), \qquad (1)$$

où $\mathcal{O}(1)_{|M}$ désigne la restriction à M du dual du fibré universel de $\mathbb{P}^n$. Nous remarquons que, au cas où la variété M est lisse, les classes de Chern-Mather sont les classes de Chern homologiques usuelles et l'expression ci-dessus coïncide avec une formule obtenue par Todd [To]. Nous pouvons, en plus, inverser formellement les expressions ci-dessus pour obtenir

$$c^M_{m-k}(M) \ = \ \sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{m+1-k+i}{i} c^1(\mathcal{O}(1)_{|M})^i \cap \left[P_{k-i}\right],$$

ce qui montre que les classes de Chern-Mather de M sont determinées par les classes polaires.

Dans cet article, nous travaillons avec une variété analytique lisse, plongée dans un espace projectif, pourvue d'une distribution holomorphe singulière de sous-espaces de son fibré tangent. Cet objet, défini dans la section 3, est consisté d'un sous-faisceau analytique cohérent du faisceau tangent à M. Il engendre une distribution de sous-espaces de l'espace tangent à M hors de l'ensemble singulier de la distribution, un ensemble analytique de codimension 1. Cet objet est une généralisation de la notion de feuilletage de Baum et Bott [BB], de laquelle on supprime l'hypothèse d'intégrabilité.

En utilisant les espaces définis par la distribution et un drapeau comme en $(*)$, nous définissons des lieux polaires associés à la distribution. Nous prouvons, dans la section 3, que ces lieux polaires définissent, pour un choix générique du drapeau, des classes dans le groupe de Chow de la variété ambiante: ce sont les classes polaires associées à la distribution. Nous prouvons dans la section 4 une formule analogue à (1), reliant les classes polaires de la distribution et les classes de Chern-Mather de son faisceau tangent. Dans la section 5, dans le cas où la distribution est définie par un fibré vectoriel et un morphisme de celui-ci sur le fibré tangent à la variété ambiante, nous obtenons une expression des classes polaires en fonction des classes de Chern de ce fibré vectoriel. Finalement, dans la section 6 nous utilisons les degrés des classes polaires de la distribution pour établir des bornes pour certains degrés des classes polaires associées à une variété analytique invariante.

Je remercie vivement Jean-Paul Brasselet, qui a accompagné tout le développement de ce travail, pour m'avoir montré, à plusieurs reprises, la bonne direction à suivre. Je remercie aussi l'Institut de Mathématiques de Luminy à Marseille pour m'avoir procuré des conditions de travail idéales pendant la préparation de ces notes.

2 Cycles de Schubert

Tout au long de ce travail, les classes considérées sont éléments du groupe de Chow de la variété concernée. Nous notons $c^\bullet$ et $c_\bullet$ les classes de Chern cohomologiques et homologiques, respectivement.

Soit $G = G(p, n)$ la grasmannienne des espaces linéaires de dimension p, aussi appelés p-plans, dans $\mathbb{P}^n$. On sait que G est une variété analytique lisse de dimension $g = (n - p)(p + 1)$. Soit $\mathcal{D}$ un drapeau comme en $(*)$. Considérons, pour chaque $k = 1, \ldots, p + 1$, l'ensemble défini par la relation

$$\sigma_k = \{\Lambda \in G(p, n);\ \dim(\Lambda \cap L_{p-k+2}) \geq k - 1\}.$$

Cet ensemble est une sous-variété analytique de G de codimension k, appelée la k-ième *variété de Schubert*. Sa classe dans le groupe de Chow de G, appelée k-ième *cycle de Schubert*, est indépendante du drapeau choisi [GH].

Nous fixons la notation suivante: pour L sous-espace linéaire de $\mathbb{P}^n$, on note V_L le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{n+1}$ de dimension $\dim L + 1$, qui lui correspond.

On a

$$\begin{aligned}\Lambda \in \sigma_k &\iff \dim\,(V_\Lambda \cap V_{L_{p-k+2}}) > k-1\\ &\iff \dim\,(V_\Lambda + V_{L_{p-k+2}}) < \dim\, V_\Lambda + \dim\, V_{L_{p-k+2}} - (k-1)\\ &\qquad = (p+1) + (n+1-(p-k+2)) - (k-1) = n+1.\end{aligned}$$

Donc, les éléments de σ_k sont précisément les éléments de $G(p,n)$ dont les espaces affines correspondants ne sont pas, par rapport à $V_{L_{p-k+2}}$, en position suffisamment générale pour engendrer $\mathbb{C}^{n+1}$.

Pour un sous-espace vectoriel $V \subset \mathbb{C}^{n+1}$, considérons l'espace dual $V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,\mathbb{C})$ comme sous-espace de $(\mathbb{C}^{n+1})^*$. Remarquons que $V^* = \{\gamma \in (\mathbb{C}^{n+1})^*;\ \gamma_{|V^\perp} \equiv 0\}$, où le symbole "$^\perp$" indique le complément orthogonal dans $\mathbb{C}^{n+1}$ par rapport à un produit intérieur hermitien choisi. Notons $W = V^\perp_{L_{p-k+2}}$ et W^* son dual. Nous notons par $\widehat{S}$ le fibré universel, ou tautologique, sur G, c'est-à-dire le fibré de rang $p+1$ dont la fibre au dessus de $\Lambda \in G$ est V_Λ, l'ensemble des vecteurs de Λ. L'inclusion de fibrés $\widehat{S} \hookrightarrow \widehat{\mathbb{C}^{n+1}}$, où $\widehat{\mathbb{C}^{n+1}}$ est le fibré trivial de fibre $\mathbb{C}^{n+1}$ et de base G, induit, par dualité, une projection $\widehat{\mathbb{C}^{n+1}}^* \to \widehat{S}^*$. La restriction de cette projection au fibré trivial $\widehat{W}^*$ de fibre W^* sur G est un homomorphisme holomorphe de fibrés $\widehat{\rho} : \widehat{W}^* \to \widehat{S}^*$. Si nous notons $\widehat{\rho}_\Lambda$ la restriction de $\widehat{\rho}$ à la fibre au dessus de $\Lambda \in G$, nous avons

$$\begin{aligned}\Lambda \in \sigma_k &\iff \dim\,(V_\Lambda + V_{L_{p-k+2}}) < n+1\\ &\iff \dim\,(V^*_\Lambda + V^*_{L_{p-k+2}}) < n+1\\ &\iff \dim\, \widehat{\rho}_\Lambda(W^*) < p-k+2\\ &\iff \bigwedge^{p-k+2} \widehat{\rho}_\Lambda : \mathbb{C} \sim \bigwedge^{p-k+2} W^* \to \bigwedge^{p-k+2} V^*_\Lambda \text{ est l'application nulle.}\end{aligned}$$

Nous venons de prouver le lemme:

Lemme 2.1. *σ_k est consisté des points $\Lambda \in G$ pour lesquels l'homomorphisme*

$$\bigwedge^{p-k+2} \widehat{\rho} : \widehat{\mathbb{C}} \sim \bigwedge^{p-k+2} \widehat{W}^* \to \bigwedge^{p-k+2} \widehat{S}^*$$

est identiquement nul, où $\widehat{\mathbb{C}}$ est le fibré trivial de fibre $\mathbb{C}$ sur G.

En conséquence du lemme ci-dessus et de la formule de Thom-Porteous [Fu, Th.14.4, Ex.14.4.1], nous obtenons

$$[\sigma_k] = c^k(S^*) \cap [G]. \tag{2}$$

3 Classes polaires pour une distribution holomorphe singulière

Soit M une variété analytique complexe lisse connexe. On note TM son fibré tangent, $\mathcal{O}$ son faisceau structural, et $\Theta = \mathcal{O}(TM)$ son faisceau tangent. Une *distribution holomorphe singulière* de sous-espaces tangents $\mathcal{F}$, ou tout simplement *distribution*, est défini comme un sous-faisceau analytique cohérent $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ de Θ, appelé *faisceau tangent* à $\mathcal{F}$. Le faisceau quotient $\mathcal{N}_{\mathcal{F}} = \Theta/\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ s'appelle *faisceau normal* à la distribution. On a une suite exacte de faisceaux:

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}_{\mathcal{F}} \longrightarrow \Theta \longrightarrow \mathcal{N}_{\mathcal{F}} \longrightarrow 0.$$

D'une manière générale, l'ensemble singulier d'un faisceau analytique cohérent $\mathcal{S}$, noté $\mathrm{Sing}(\mathcal{S})$, consiste en les points de M où la fibre $\mathcal{S}_x$ n'est pas un $\mathcal{O}_x$-module libre. On appelle $\mathrm{Sing}(\mathcal{N}_{\mathcal{F}})$ l'*ensemble singulier* de la distribution $\mathcal{F}$ et on le note $\mathrm{Sing}(\mathcal{F})$. Evidemment $\mathrm{Sing}(\mathcal{T}_{\mathcal{F}}) \subset \mathrm{Sing}(\mathcal{F})$. Il suit de la définition que $\mathrm{Sing}(\mathcal{F})$ est un ensemble analytique de codimension au moins 1.

Soit p le rang de la partie localement libre de $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$. On appelle ce nombre la *dimension* de $\mathcal{F}$. Au-dessus de $M_0 = M \setminus \mathrm{Sing}(\mathcal{F})$ le faisceau $\mathcal{T}_{\mathcal{F}|M_0}$ est localement libre. Il correspond donc à un fibré vectoriel $T\mathcal{F}$ de rang p, sous-fibré de $TM_{|M_0}$, qu'on appelle *fibré tangent* à la partie regulière de la distribution. On note $T_x\mathcal{F}$ la fibre de $T\mathcal{F}$ au-dessus de $x \in M_0$.

Dans le cas où le faisceau $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ est involutif, la distribution de sous-espaces vectoriels de dimension p dans $TM_{|M_0}$ est intégrable, d'après le théorème de Frobenius. On obtient donc un feuilletage holomorphe régulier de M_0, dont l'espace tangent à la feuille passant par $x \in M_0$ est $T_x\mathcal{F}$, fibre de $T\mathcal{F}$ au-dessus de x. On a donc dans M un feuilletage holomorphe singulier (voir [BB]). Cependant, l'hypothèse d'intégrabilité ne sera pas necéssaire au long de ces notes, ce qui nous permettra de considérer la classe plus générale des distributions holomorphes singulières.

Supposons maintenant que M soit une sous-variété de $\mathbb{P}^n$. Dans ce cas, pour chaque $x \in M_0$, le sous-espace $T_x\mathcal{F} \subset T_xM$ définit de manière unique un p-plan de $\mathbb{P}^n$ contenant x, noté $T_x^{\mathbb{P}}\mathcal{F}$. Cette correspondance définit l'*application de Gauss* pour la distribution $\mathcal{F}$:

$$\begin{aligned} \Phi^{\mathcal{F}} : \quad M_0 &\longrightarrow G(p,n) \\ x &\longmapsto T_x^{\mathbb{P}}\mathcal{F}\ . \end{aligned}$$

C'est un morphisme analytique qui, en tant qu'application définie sur M, est une application rationnelle.

Soient $M \subset \mathbb{P}^n$ une variété analytique lisse de dimension m et $\mathcal{F}$ une distribution holomorphe singulière de dimension p sur M. Supposons que $\mathbb{P}^n$ soit pourvu d'un drapeau $\mathcal{D}$ comme $(*)$. Pour $k = 1, \ldots, p+1$, le k-ième *lieu polaire* de $\mathcal{F}$ par rapport à $\mathcal{D}$ est défini par

$$P_k^{\mathcal{F}} \;=\; Adh\big\{x \in M \setminus \mathrm{Sing}(\mathcal{F});\; \dim\,(T_x^{\mathbb{P}}\mathcal{F} \cap L_{p-k+2}) \;\geq\; k-1\big\},$$

où l'adhérence Adh est prise dans M. Celui-ci peut être aussi défini par l'application de Gauss associée à $\mathcal{F}$:

$$P_k^{\mathcal{F}} \;=\; Adh\,\big\{(\Phi^{\mathcal{F}})^{-1}(\sigma_k)\big\},$$

où σ_k est la k-ième variété de Schubert dans $G(p,n)$. Remarquons que, en analogie à ce qui se passe pour les variétés de Schubert, un point $x \in M \setminus \mathrm{Sing}(\mathcal{F})$ appartient à $P_k^{\mathcal{F}}$ si et seulement si $V_{T_x^{\mathbb{P}}\mathcal{F}}$ et $V_{L_{p-k+2}}$ n'engendrent pas $\mathbb{C}^{n+1}$. Nous étendons la définition ci-dessus à $k=0$ en posant $P_0^{\mathcal{F}} = M$.

Exemple 3.1. Analysons la situation où $M = \mathbb{P}^n$ et $k = p = 1$. Dans ce cas, la condition d'intégrabilité est immédiate et $\mathcal{F}$ est un feuilletage holomorphe singulier. On peut supposer que $\mathrm{codim}(\mathcal{F}) \geq 2$. On a $x \in P_1^{\mathcal{F}} \cap (M \setminus \mathrm{Sing}(\mathcal{F}))$ si et seulement si $\dim(T_x^{\mathbb{P}}\mathcal{F} \cap L_2) \geq 0$. Cela veut dire que la droite $T_x^{\mathbb{P}}\mathcal{F}$ doit rencontrer l'espace linéaire L_2 de codimension 2 du drapeau et, par conséquent, $T_x^{\mathbb{P}}\mathcal{F}$ et L_2 définissent un hyperplan tangent à la feuille passant par x. Un calcul direct montre que $\mathrm{Sing}(\mathcal{F})$ est dans l'adhérence de $P_1^{\mathcal{F}} \cap (M \setminus \mathrm{Sing}(\mathcal{F}))$ et donc $\mathrm{Sing}(\mathcal{F}) \subset P_1^{\mathcal{F}}$. Ces remarques nous permettent de construire $P_1^{\mathcal{F}}$ à partir du pinceau d'hyperplans $\mathcal{H} = \{H_t\}_{t \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}}$ d'axe L_2: pour chaque $H_t \in \mathcal{H}$, nous définissons $\mathrm{Div}(H_t, \mathcal{F})$ comme l'ensemble des points $x \in H_t$ où H_t et $\mathcal{F}$ ne sont pas transverses, c'est à dire,

$$\mathrm{Div}(H_t, \mathcal{F}) = (\mathrm{Sing}(\mathcal{F}) \cap H_t) \cup \big\{x \notin \mathrm{Sing}(\mathcal{F});\, T_x^{\mathbb{P}} \subset H_t\big\}.$$

Nous avons alors:

$$P_1^{\mathcal{F}} \;=\; \bigcup_{t \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}} \mathrm{Div}(H_t, \mathcal{F}).$$

L'ensemble $P_1^{\mathcal{F}}$ apparaît en [So1], où il est appelé *diviseur de tangences* de $\mathcal{F}$ par rapport à $\mathcal{H}$ et noté $\mathcal{D}_{\mathcal{H}}$. Soit $H_t \in \mathcal{H}$ un hyperplan générique, alors $\mathrm{Div}(H_t, \mathcal{F})$ est une hypersurface algébrique dans $H_t \sim \mathbb{P}^{n-1}$ de degré d_0. Ce nombre s'appelle le degré du feuilletage $\mathcal{F}$. Remarquons que $P_1^{\mathcal{F}}$ est une hypersurface de $\mathbb{P}^n$ de degré $d_0 + 1$, puisque l'axe L_2 est entièrement contenu dans $P_1^{\mathcal{F}}$.

Soit $G_M = G_M(p-1, m-1)$ le fibré des grassmanniennes des sous-espaces vectoriels de dimension p associé au fibré tangent à M. C'est un fibré de base M dont la fibre au-dessus de $x \in M$ est la grassmannienne des sous-espaces vectoriels de dimension p de $T_x M$.

Le fibré $\pi : G_M \to M$ admet au-dessus de $M_0 = M \setminus \mathrm{Sing}(\mathcal{F})$ une section s_0 définie par

$$s_0(x) \ = \ T_x\mathcal{F}\ ,\ x \in M_0.$$

La *transformée de Nash* de M par rapport à la distribution $\mathcal{F}$, notée $\widetilde{M}$, est l'adhérence de $\widetilde{M}_0 = s_0(M_0)$ dans G_M (voir [Se],[BS]). Nous remarquons que $\widetilde{M}$ est une variété analytique de dimension m, éventuellement singulière [Wh, Th.16.4].

La restriction de la projection π à $\widetilde{M}$, notée $\widetilde{\pi}$, est une application analytique propre, puisque π est une fibration à fibres compactes. Le lieu singulier de $\widetilde{M}$ est contenu dans $\widetilde{\pi}^{-1}(\mathrm{Sing}(\mathcal{F}))$ et la restriction $\widetilde{\pi}_{|\widetilde{M}_0} : \widetilde{M}_0 \to M_0$ est un biholomorphisme entre variétés lisses.

Observons que, puisque M est plongée dans $\mathbb{P}^n$, on a un plongement $G_M \hookrightarrow M \times G(p,n)$ construit de la façon suivante: à un élément $V \in G_M$ au-dessus de $x \in M$, c'est à dire, à un sous-espace vectoriel de dimension p de $T_x M$, nous associons l'unique p-plan de $\mathbb{P}^n$ qui passe par x et de direction determinée par V. Notons $\overline{M}$ l'image de $\widetilde{M}$ dans $M \times G(p,n)$ par ce plongement et $\overline{\pi} : \overline{M} \to \widetilde{M}$ l'inverse de l'isomorphisme analytique correspondant. Nous avons donc un diagramme d'applications analytiques

$$\begin{array}{lcl}
\overline{M} \subset M \times G(p,n) & \xrightarrow{\overline{\psi}} & G(p,n) \\
\overline{\pi}\big\downarrow & & \\
\ \widetilde{M} \subset G_M & & \\
\widetilde{\pi}\big\downarrow & & \\
\ M & &
\end{array}$$

où $\overline{\psi}$ dénote la restriction à $\overline{M}$ de la projection naturelle $M \times G(p,n) \to G(p,n)$. Observons que $\overline{M}_0 = \overline{\pi}^{-1}(\widetilde{M}_0)$ est une variété lisse et que $\overline{\pi}|_{|\overline{M}_0} : \overline{M}_0 \to \widetilde{M}_0$ est un biholomorphisme.

Avec les notations précédentes, nous avons

$$(\widetilde{\pi} \circ \overline{\pi})^{-1}(P_k^{\mathcal{F}} \cap M_0) \ = \ \overline{\psi}^{-1}(\sigma_k) \cap \overline{M}_0. \tag{3}$$

Il résulte de (3) et du lemme (3.2) ci-dessous que

$$P_k^{\mathcal{F}} \ = \ \widetilde{\pi} \circ \overline{\pi}(\overline{\psi}^{-1}(\sigma_k)).$$

Notons $\overline{P}_k^{\mathcal{F}} = \overline{\psi}^{-1}(\sigma_k) \subset \overline{M}$, ce qui nous donne $P_k^{\mathcal{F}} = \widetilde{\pi} \circ \overline{\pi}(\overline{P}_k^{\mathcal{F}})$. L'application de Gauss s'écrit

$$\Phi^{\mathcal{F}} = \overline{\psi} \circ (\widetilde{\pi} \circ \overline{\pi})^{-1}_{|\overline{M}_0}.$$

L'ensemble $\overline{P}_k^{\mathcal{F}}$, bien que contenu dans une variété possiblement singulière, a l'avantage d'être l'image inverse de l'objet analytique σ_k par le morphisme analytique $\overline{\psi}$. Par contre, le lieu polaire $P_k^{\mathcal{F}}$ est, lui, contenu dans une variété lisse, mais est défini par $\Phi^{\mathcal{F}}$, une application au mieux rationnelle.

Observons que le fibré vectoriel $\widetilde{T}$, restriction à $\widetilde{M}$ du fibré universel de G_M, est une "extension" du fibré tangent à la partie regulière de $\mathcal{F}$. En effet, nous avons

$$\widetilde{T}_{|\widetilde{M}_0} = \widetilde{\pi}^*_{|\widetilde{M}_0} T\mathcal{F}.$$

En tenant compte de ce que M est plongée dans $\mathbb{P}^n$, on peut construire un fibré vectoriel $\widetilde{S}$ de rang $p+1$ sur $\widetilde{M}$ de la façon suivante: pour chaque $x \in \widetilde{M}$ au-dessus de $\widetilde{\pi}(x) \in M$, nous prenons l'unique p-plan de $\mathbb{P}^n$ qui passe par $\widetilde{\pi}(x)$ dans la direction de $\widetilde{T}_x$. Ce p-plan, à son tour, correspond à un sous-espace vectoriel de dimension $p+1$ de $\mathbb{C}^{n+1}$ qui sera la fibre au-dessus de x du fibré $\widetilde{S}$.

Le fibré $\widetilde{S}$ peut être relevé en un fibré $\overline{S} = \overline{\pi}^*\widetilde{S}$ sur $\overline{M}$. Remarquons que $\overline{S} = \overline{\psi}^*\widehat{S}$, où $\widehat{S}$ désigne le fibré universel sur $G(p,n)$. En outre, puisque $\widehat{S}$ est sous-fibré du fibré trivial de fibre $\mathbb{C}^{n+1}$ sur $G(p,n)$, $\widetilde{S}$ et $\overline{S}$ sont des sous-fibrés de $\widetilde{\mathbb{C}^n}$ et de $\overline{\mathbb{C}^n}$, fibrés triviaux de fibre $\mathbb{C}^{n+1}$ et de base $\widetilde{M}$ et $\overline{M}$, respectivement.

La démonstration du résultat suivant se trouve dans [Pi]:

Lemme 3.2. [Lemme de transversalité] *Soient V une variété analytique réduite et équidimensionnelle et $\Phi\colon V \to G(p,n)$ un morphisme analytique. Pour un drapeau générique $\mathcal{D}$ comme en $(*)$ et pour chaque $k = 1, \ldots, p+1$ la variété de Schubert $\sigma = \sigma_k$ a les propriétés suivantes:*

(i) *L'ensemble $\Phi^{-1}(\sigma)$ est soit vide, soit équidimensionel, et sa codimension dans V est égale à celle de σ dans $G(p,n)$;*

(ii) *$\Phi^{-1}(\sigma)$ est réduit ;*

(iii) *si $U \subset V$ est un ouvert dense, $\Phi^{-1}(\sigma)_{|U}$ est dense dans $\Phi^{-1}(\sigma)$;*

(iv) *le cycle $\Phi^*[\sigma]$ est bien défini et égal à $\left[\Phi^{-1}(\sigma)\right]$.*

Dans le même esprit que ce qui a été fait pour les variétés de Schubert, il est possible de définir $\overline{P}_k^{\mathcal{F}}$ comme l'ensemble de zéros d'un homomorphisme de fibrés. Considérons, de nouveau, le complément orthogonal W de $V_{L_{p-k+2}}$

dans $\mathbb{C}^{n+1}$ et W^* son dual. Soit $\overline{W}$ le fibré trivial de base $\overline{M}$ et de fibre W. La restriction de la projection $\overline{\mathbb{C}^{n+1}}^* \to \overline{S}^*$ à $\overline{W}^*$ définit un homomorphisme

$$\overline{\rho} : \overline{W}^* \to \overline{S}^*. \tag{4}$$

Un raisonnement semblable à celui de la démonstration du lemme 2.1 nous amène à conclure que $\overline{P}_k^{\mathcal{F}}$ consiste en les points x de $\overline{M}$ pour lesquels l'homomorphisme

$$\bigwedge^{p-k+2} \overline{\rho} \;:\; \overline{\mathbb{C}} \sim \bigwedge^{p-k+2} \overline{W}^* \longrightarrow \bigwedge^{p-k+2} \overline{S}^* \tag{5}$$

est identiquement nul, en notant $\overline{\mathbb{C}}$ le fibré trivial de fibre $\mathbb{C}$ et base $\overline{M}$. En fait, nous avons $\overline{\rho} = \overline{\psi}^* \widehat{\rho}$, où $\widehat{\rho} : \widehat{W}^* \to \widehat{S}^*$ a été défini dans la section 2.

Proposition 3.3. *Pour un choix générique d'un drapeau $\mathcal{D}$ comme en $(*)$ et pour $k = 1, \ldots, p+1$, la classe $\left[P_k^{\mathcal{F}}\right] \in A_{m-k}(M)$ est indépendante du drapeau choisi.*

Démonstration: Prenons un drapeau, génériquement choisi de façon que le lemme de transversalité 3.2 s'applique. Des propriétés (i) et (ii) du lemme, $\overline{P}_k^{\mathcal{F}}$ est une variété réduite, ou vide, ou de codimension k. La propriété (iv), appliquée à $\overline{\psi} : \overline{M} \to G$, montre que

$$\begin{aligned} \left[\overline{P}_k^{\mathcal{F}}\right] = \left[\overline{\psi}^{-1}(\sigma_k)\right] &= \overline{\psi}^*[\sigma_k] \\ &= \overline{\psi}^*(c^k(\widehat{S}^*) \cap [G]) \quad (\text{par } (2)) \\ &= c^k(\overline{\psi}^* \widehat{S}^*) \cap [\overline{\psi}^* G] \\ &= c^k(\overline{S}^*) \cap [\overline{M}]. \end{aligned}$$

Donc, $\left[\overline{P}_k^{\mathcal{F}}\right]$ ne dépend pas du drapeau générique choisi. La propriété (iii) appliquée à l'ouvert $\overline{M}_0$ et le fait que $\widetilde{\pi} \circ \overline{\pi}_{|\overline{M}_0} : \overline{M}_0 \to M_0$ soit un biholomorphisme impliquent que

$$\left[P_k^{\mathcal{F}}\right] = \widetilde{\pi}_* \left[\widetilde{P}_k^{\mathcal{F}}\right].$$

Ceci démontre, à son tour, l'indépendance de $\left[P_k^{\mathcal{F}}\right]$ par rapport au drapeau générique. D'autre part, de la remarque faite concernant la dimension de $\widetilde{P}_k^{\mathcal{F}}$, il résulte que $\left[P_k^{\mathcal{F}}\right] \in A_{(m-k)}(M)$. □

4 Formule de Todd

L'objectif central de cette section est de prouver une formule analogue à (1) pour les classes polaires associées à une distribution. Commençons par la proposition suivante:

Proposition 4.1. *Il existe une suite exacte courte de fibrés*

$$0 \longrightarrow \widetilde{\pi}^*\mathcal{O}(-1)_{|M} \longrightarrow \widetilde{S} \longrightarrow \widetilde{T} \otimes \widetilde{\pi}^*\mathcal{O}(-1)_{|M} \longrightarrow 0, \tag{6}$$

où $\mathcal{O}(-1)_{|M}$ désigne la restriction à M du fibré universel de $\mathbb{P}^n$.

Démonstration: De la suite d'Euler de fibrés sur $\mathbb{P}^n$

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow (\mathcal{O}(1))^{n+1} \longrightarrow T\mathbb{P}^n \longrightarrow 0, \tag{7}$$

(voir, par exemple, [GH]), nous obtenons, après tensorisation par $\mathcal{O}(-1)$, une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-1) \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1} \xrightarrow{\alpha} T\mathbb{P}^n \otimes \mathcal{O}(-1) \longrightarrow 0. \tag{8}$$

Remarquons d'abord que, pour obtenir le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{n+1}$ correspondant à $x \in \mathbb{P}^n$ et à un sous-espace $V \subset T\mathbb{P}^n$, il suffit de prendre l'image inverse de $V \otimes \mathcal{O}(-1)_x$ par l'homomorphisme α. L'image réciproque de (8) par $\widetilde{\pi}$ donne

$$0 \longrightarrow \widetilde{\pi}^*\mathcal{O}(-1)_{|M} \longrightarrow \widetilde{\mathbb{C}^{n+1}} \longrightarrow \widetilde{\pi}^*T\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}|M \otimes \widetilde{\pi}^*\mathcal{O}(-1)_{|M} \longrightarrow 0.$$

Alors, d'une part la pré-image en $\widetilde{\mathbb{C}^{n+1}}$ de $\widetilde{T} \otimes \widetilde{\pi}^*\mathcal{O}(-1)_{|M}$ est $\widetilde{S}$, d'autre part le noyau de la projection $\widetilde{S} \to \widetilde{T} \otimes \widetilde{\pi}^*\mathcal{O}(-1)_{|M}$ est évidemment $\widetilde{\pi}^*\mathcal{O}(-1)_{|M}$. Cela termine la démonstration. □

Nous sommes donc en mesure de prouver le résultat central de cette section:

Théorème 4.2. *La k-ième classe polaire de $\mathcal{F}$ s'écrit*

$$\left[P_k^{\mathcal{F}}\right] = \sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{p+1-k+i}{i} c^1(\mathcal{O}(1)_{|M})^i \cap c^M_{m-k+i}(\mathcal{T}_{\mathcal{F}}),$$

où $c^M_{\bullet}$ désigne la classe de Chern-Mather (voir [Sc] et [K]).

Démonstration: Nous avons vu dans la démonstration de la proposition 3.3 que

$$\left[\overline{P}_k^{\mathcal{F}}\right] = c^k(\overline{S}^*) \cap [\overline{M}].$$

En prenant l'image réciproque par $\overline{\pi}$ de la suite exacte duale de (6), nous obtenons

$$0 \longrightarrow \overline{T}^* \otimes (\widetilde{\pi} \circ \overline{\pi})^* \mathcal{O}(1)_{|M} \longrightarrow \overline{S}^* \longrightarrow (\widetilde{\pi} \circ \overline{\pi})^* \mathcal{O}(1)_{|M} \longrightarrow 0,$$

qui, par la propriété de la somme de Whitney, nous donne

$$\begin{aligned} c^k(\overline{S}^*) &= \sum_{j=0}^{k} c^{k-j}(\overline{T}^* \otimes (\widetilde{\pi} \circ \overline{\pi})^* \mathcal{O}(1)_{|M}) \cup c^j((\widetilde{\pi} \circ \overline{\pi})^* \mathcal{O}(1)_{|M}) \\ &= c^k(\overline{T}^* \otimes (\widetilde{\pi} \circ \overline{\pi})^* \mathcal{O}(1)_{|M}) \\ &\quad + c^{k-1}(\overline{T}^* \otimes (\widetilde{\pi} \circ \overline{\pi})^* \mathcal{O}(1)_{|M}) \cup c^1((\widetilde{\pi} \circ \overline{\pi})^* \mathcal{O}(1)_{|M}). \end{aligned}$$

Nous avons

$$c^k(\overline{T}^* \otimes (\widetilde{\pi} \circ \overline{\pi})^* \mathcal{O}(1)_{|M}) = \sum_{i=0}^{k} \binom{p-k+i}{i} c^{k-i}(\overline{T}^*) \cup c^1((\widetilde{\pi} \circ \overline{\pi})^* \mathcal{O}(1)_{|M})^i$$

$$c^{k-1}(\overline{T}^* \otimes (\widetilde{\pi} \circ \overline{\pi})^* \mathcal{O}(1)_{|M}) = \sum_{i=1}^{k} \binom{p-k+i}{i-1} c^{k-i}(\overline{T}^*) \cup c^1((\widetilde{\pi} \circ \overline{\pi})^* \mathcal{O}(1)_{|M})^{i-1}.$$

Ces expressions, avec le fait que $c^j(\overline{T}^*) = (-1)^j c^j(\overline{T})$, nous donnent la relation

$$\left[\overline{P}_k^{\mathcal{F}}\right] = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{p+1-k+i}{i} (c^1((\widetilde{\pi} \circ \overline{\pi})^* \mathcal{O}(1)_{|M})^i \cup c^{k-i}(\overline{T})) \cap [\overline{M}],$$

qui, projetée par $\overline{\pi}$ sur $\widetilde{M}$, nous donne

$$\left[\widetilde{P}_k^{\mathcal{F}}\right] = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{p+1-k+i}{i} (c^1(\widetilde{\pi}^* \mathcal{O}(1)_{|M})^i \cup c^{k-i}(\widetilde{T})) \cap [\widetilde{M}].$$

On achève la démonstration en prenant l'image de cette dernière expression par $\widetilde{\pi}$ et en tenant compte de ce que $c_{m-\bullet}^M(\mathcal{T}_{\mathcal{F}})) = \widetilde{\pi}_*(c^\bullet(\widetilde{T}) \cap [\widetilde{M}])$. □

Par inversion de l'expression du théorème ci-dessus, il est possible de calculer les classes de Chern-Mather du faisceau tangent à la distribution $\mathcal{F}$ à partir de ses classes polaires. C'est le contenu du

Corollaire 4.3. *Pour $k = 0, \ldots, p$, nous avons*

$$c^M_{m-k}(\mathcal{T}_{\mathcal{F}}) \ = \ \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{p+1-k+i}{i} c^1(\mathcal{O}(1)_{|M})^i \cap \left[P^{\mathcal{F}}_{k-i}\right].$$

5 Distributions localement repérées

Pour une classe importante de distributions, on peut écrire une formule explicite reliant les classes polaires d'une distribution et les classes de Chern usuelles de son fibré tangent. Nous avons la définition suivante:

Définition 5.1. Soit $\mathcal{F}$ une distribution holomorphe singulière de dimension p dans une variété analytique lisse M. Nous disons que $\mathcal{F}$ est *localement repérée* si elle est définie par un fibré vectoriel de rang p, c'est-à-dire s'il existe un fibré E de rang p sur M et un homomorphisme de fibrés $f : E \to TM$, injectif sur $M_0 = M \setminus \mathrm{Sing}(\mathcal{F})$, tels que, pour tout $x \in M_0$, l'image de la fibre E_x par f est $T_x\mathcal{F}$. On appelle E le *fibré tangent* à $\mathcal{F}$ et on le note $T\mathcal{F}$.

La proposition suivante caractérise les distributions localement repérées tout en justifiant cette terminologie:

Proposition 5.2. *Soit $\mathcal{F}$ une distribution de dimension p dans une variété analytique lisse M. Si $\mathcal{F}$ est localement repérée alors il existe un recouvrement ouvert $\{U_\alpha\}$ de M et, pour chaque α, des champs de vecteurs $v_{\alpha,1}, \ldots, v_{\alpha,p}$ tels que:*

(i) $v_{\alpha,1}(x), \ldots, v_{\alpha,p}(x)$ *engendrent $T_x\mathcal{F}$, si $x \in M \setminus Sing(\mathcal{F})$;*

(ii) $v_{\alpha,1}(x), \ldots, v_{\alpha,p}(x)$ *sont linéairement dépendants, si $x \in Sing(\mathcal{F})$.*

Réciproquement, s'il existe un tel recouvrement et des tels champs de vecteurs satisfaisant (i) *et* (ii) *et si, en plus, $codimSing(\mathcal{F}) \geq 2$, alors $\mathcal{F}$ est localement répérée.*

Démonstration: Supposons, d'abord, que $\mathcal{F}$ soit localement repérée. Soient $T\mathcal{F}$ le fibré vectoriel de rang p sur M et $f : T\mathcal{F} \to TM$ l'homomorphisme de fibrés donnés par la définition. Considérons un recouvrement $\{U_\alpha\}$ de M par des ouverts de trivialisation de $T\mathcal{F}$. Notons $\{e_1, \ldots, e_p\}$ la base canonique de $\mathbb{C}^p$ et $s_{\alpha,i}$, pour $i = 1, \ldots, p$, la section de $T\mathcal{F}$ au dessus de U_α qui correspond, dans la trivialisation $U_\alpha \times \mathbb{C}^p$, à la section constante e_i. Il suffit donc de prendre pour $v_{\alpha,i}$ l'image de $s_{\alpha,i}$ par l'homomorphisme f.

Réciproquement, supposons que la propriété de l'énoncé soit vraie. Pour $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, considérons un point x de $U_{\alpha\beta} \setminus \mathrm{Sing}(\mathcal{F})$. Il existe donc un unique isomorphisme linéaire $G_{\alpha\beta}(x) \in GL(p, \mathbb{C})$ tel que

$$v_{\alpha,i}(x) \;=\; G_{\alpha\beta}(x) v_{\beta,i}(x) \text{ pour } i = 1, \ldots, p.$$

Cela définit une application analytique $G_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \setminus \mathrm{Sing}(\mathcal{F}) \to GL(p, \mathbb{C})$. Puisque $\mathrm{Sing}(\mathcal{F})$ a codimension au moins 2, cette application s'étend en une application analytique définie sur tout $U_{\alpha\beta}$, et notée de la même façon. Il résulte de leur définition que les fonctions $G_{\alpha\beta}$ obéissent à la condition de cocycle, soit:

(i) $G_{\alpha\beta}(x) G_{\beta\alpha}(x) = I_p \ \forall\, x \in U_{\alpha\beta}$, si $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$;

(ii) $G_{\alpha\beta}(x) G_{\beta\gamma}(x) G_{\gamma\alpha}(x) = I_p \ \forall\, x \in U_{\alpha\beta\gamma} = U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$, si $U_{\alpha\beta\gamma} \neq \emptyset$,

où I_p désigne l'identité de $GL(p, \mathbb{C})$. Les fonctions $(G^{\,t}_{\alpha\beta})^{-1}$, où " ^{t} " désigne la transposition, sont donc les fonctions de transition d'un fibré vectoriel de rang p noté $T\mathcal{F}$. Pour définir l'homomorphisme $f : T\mathcal{F} \to TM$ on procède de la manière suivante: pour chaque α, nous prenons une trivialisation locale $U_\alpha \times \mathbb{C}^p$ de $T\mathcal{F}$ et nous définissons $f(x, (t_1, \ldots, t_p)) = t_1 v_{\alpha,1}(x) + \cdots + t_p v_{\alpha,p}$. Cette définition locale est compatible avec le cocycle défini par les fonctions $(G^{\,t}_{\alpha\beta})^{-1}$ et produit l'homomorphisme f désiré. Il est clair que f n'est pas injectif sur, et seulement sur, $\mathrm{Sing}(\mathcal{F})$. □

Le faisceau tangent $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ associé à une distribution localement repérée $\mathcal{F}$ de rang p sur une variété lisse M est le sous-faisceau de $\Theta = \mathcal{O}(TM)$ engendré par les "sections" de l'image du fibré $T\mathcal{F}$ dans TM. Autrement dit, $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ est engendré par les germes de champs de vecteurs $v_{\alpha,1}, \ldots, v_{\alpha,p}$ donnés par la proposition 5.2. Le faisceau $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ est donc localement libre de rang p et ses classes de Chern-Mather coïncident avec les classes de Chern homologiques usuelles du fibré $T\mathcal{F}$ (voir [K]): $c^M_{m-\bullet}(\mathcal{T}_{\mathcal{F}}) = c^\bullet(T\mathcal{F}) \cap [M]$. De manière réciproque, une distribution dont le faisceau tangent est localement libre et dont l'ensemble singulier a codimension au moins 2 est localement repéré. On remarque que la proposition 5.2 est une version en dimension plus haute du théorème 1 de [G].

Exemple 5.3. Une distribution de dimension 1 – donc un feuilletage holomorphe singulier – dont l'ensemble singulier a codimension au moins 2 est localement repérée. En fait, il suffit de vérifier qu'une tel feuilletage est localement engendré par un champ de vecteurs analytique. Le problème étant local, nous pouvons le considérer dans un polydisque $\Delta \subset \mathbb{C}^n$. Pour chaque point $x \in \Delta \setminus \mathrm{Sing}(\mathcal{F})$, considérons $w(x) = (w_1(x), \ldots, w_p(x))$ un vecteur tangent à la feuille qui passe par x. Supposons que la coordonée $w_p(x)$ ne soit pas identiquement nulle. Nous définissons ainsi des fonctions méromorphes

$$\varphi_1(x) = \frac{w_1(x)}{w_p(x)}, \ldots, \varphi_{p-1}(x) = \frac{w_{p-1}(x)}{w_p(x)} \quad \text{sur } \Delta \setminus \mathrm{Sing}(\mathcal{F}).$$

Puisque $\mathrm{Sing}(\mathcal{F})$ a codimension au moins 2, ces fonctions s'étendent en des fonctions méromorphes sur Δ. Ces extensions peuvent être écrites comme des quotients des fonctions analytiques définies sur Δ de la manière suivante:

$$\varphi_1 = \frac{f_1}{g_1}, \ldots, \varphi_{p-1} = \frac{f_{p-1}}{g_{p-1}}.$$

Nous définissons v_p comme le plus petit commun multiple de $g_1, \ldots, g_{p-1}$. Finalement, nous posons $v_1 = \varphi_1 v_p, \ldots, v_{p-1} = \varphi_{p-1} v_p$. Le champ analytique $v = (v_1, \ldots, v_{p-1}, v_p)$ engendre $\mathcal{F}$ sur Δ.

Nous avons le résultat suivant:

Théorème 5.4. *Soit $\mathcal{F}$ une distribution localement repérée de fibré tangent $T\mathcal{F}$. Alors sa k-ième classe polaire s'écrit*

$$\left[P_k^{\mathcal{F}}\right] = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{p+1-k+i}{i} (c^1(\mathcal{O}(1)_{|M})^i \cup c^{k-i}(T\mathcal{F})) \cap [M].$$

Exemple 3.1. [Revu] Un feuilletage $\mathcal{F}$ de dimension 1 et de degré d_0 dans $M = \mathbb{P}^n$ a pour fibré tangent $\mathcal{O}(1-d_0)$ [MS]. Du théorème précédent, nous obtenons

$$\begin{aligned} \left[P_1^{\mathcal{F}}\right] &= (-1)\tbinom{1}{0} c^1(\mathcal{O}(1-d_0)) \cap [\mathbb{P}^n] + \tbinom{2}{1} c^1(\mathcal{O}(1)) \cap [\mathbb{P}^n] \\ &= (d_0+1) c^1(\mathcal{O}(1)) \cap [\mathbb{P}^n], \end{aligned}$$

d'où nous concluons que $P_1^{\mathcal{F}}$ est une hypersurface analytique de degré $d_0 + 1$.

6 Variétés invariantes par une distribution

H. Poincaré, en 1891, a consideré la question suivante: étant donnés un feuilletage $\mathcal{F}$ de $\mathbb{P}^2$ et une courbe algébrique Γ invariante par $\mathcal{F}$, est il possible de borner le degré de V en fonction du degré de $\mathcal{F}$ [Po]? En général, cette question a une réponse négative. Considérons, par exemple, le feuilletage $\mathcal{F}$ de $\mathbb{P}^2$ défini par l'équation $pydx + qxdy = 0$, où p et q sont des entiers positifs. $\mathcal{F}$ a degré 1 et pourtant la courbe d'équation $x^p - y^q = 0$ est $\mathcal{F}$-invariante et son degré est $\max\{p, q\}$. Cependant, des réponses affirmatives ont été obtenus dans certains cas, tels que le cas où la courbe admet seulement des singularités nodales [CL] (voir exemple 6.6 ci-dessous) et celui où la courbe ne contient pas des singularités dicritiques du feuilletage [Ca]. Pour les dimensions plus grandes, on cite [BM], où le degré d'une hypersurface de $\mathbb{P}^n$ est borné par le degré d'une distribution de dimension quelconque qui la laisse invariante.

M. Soares a obtenu en [So] et [So1] des bornes pour les degrés de certaines classes polaires d'une variété analytique lisse invariante par un feuilletage de dimension 1 de $\mathbb{P}^n$ en fonction du degré du feuilletage. En ce qui suit, nous généralison ce résultat pour une distribution holomorphe singulière de dimension quelconque de $\mathbb{P}^n$ laissant invariante une variété éventuellement singulière.

Soit $\mathcal{F}$ une distribution holomorphe singulière de $\mathbb{P}^n$ de dimension p. Nous disons qu'une variété analytique $V \subset \mathbb{P}^n$ de dimension $q \geq p$ est *invariante* par $\mathcal{F}$ si $V \not\subset \mathrm{Sing}(\mathcal{F})$ et $T_x\mathcal{F} \subset T_xV$ pour tout $x \in V \setminus \mathrm{Sing}(\mathcal{F})$. Supposons qu'une telle variété V existe et qu'elle soit compacte.

Les degrés polaires de V sont les degrés des classes polaires associés à V. En fait, on considère le degré des images de ces classes dans $A_\bullet(\mathbb{P}^n)$, induites par l'inclusion $V \hookrightarrow \mathbb{P}^n$. On les note $\rho_k^V = \deg[P_k^V]$, $k = 0, \ldots, q$. Puisque $P_0^V = V$, alors ρ_0^V est le degré de V. D'une manière similaire, nous définissons les degrés polaires de $\mathcal{F}$ comme étant les degrés des classes polaires associées. On les note $\rho_k^{\mathcal{F}} = \deg[P_k^{\mathcal{F}}]$, $k = 0, \ldots, p$.

Choisissons un drapeau comme en (*) suffisamment générique. Considérons les lieux polaires de V et de $\mathcal{F}$ par rapport à ce drapeau. On a

Lemme 6.1. *Dans la situation décrite ci-dessus, on a* $P_q^V \subset P_p^{\mathcal{F}}$.

Démonstration: Rappelons les définitions:

$$P_q^V \;=\; Adh\left\{x \in V \setminus \mathrm{Sing}(V);\; \dim\,(T_x^{\mathbb{P}}V \cap L_2) \geq q-1\right\};$$

$$P_p^{\mathcal{F}} \;=\; Adh\left\{x \in M \setminus \mathrm{Sing}(\mathcal{F});\; \dim\,(T_x^{\mathbb{P}}\mathcal{F} \cap L_2) \geq p-1\right\}.$$

Puisque V est $\mathcal{F}$-invariant, on a $T_x^{\mathbb{P}}\mathcal{F} \subset T_x^{\mathbb{P}}V$ partout où ces deux espaces sont définis. L'ensemble P_q^V est constitué de points isolés et donc, par (iii) du lemme de transversalité 3.2, on peut supposer que $P_q^V \subset V \setminus (\mathrm{Sing}(V) \cup \mathrm{Sing}(\mathcal{F}))$. Soit

$$x \in P_q^V, \quad \text{si} \quad T_x^{\mathbb{P}}V \subset L_2 \quad \text{alors} \quad T_x^{\mathbb{P}}\mathcal{F} \subset T_x^{\mathbb{P}}V \subset L_2\,,$$

et donc

$$x \in P_k^{\mathcal{F}}; \quad \text{si} \quad T_x^{\mathbb{P}} V \not\subset L_2 \quad \text{alors} \quad \dim(T_x^{\mathbb{P}} V \cap L_2) \;=\; q-1\,,$$

c'est à dire, $T_x^{\mathbb{P}} V \cap L_2$ a codimension 1 dans $T_x^{\mathbb{P}} V$. On a donc

$$\dim(T_x^{\mathbb{P}} \mathcal{F} \cap L_2) \;=\; \dim(T_x^{\mathbb{P}} \mathcal{F} \cap (T_x^{\mathbb{P}} V \cap L_2)) \;\geq\; \dim(T_x^{\mathbb{P}} \mathcal{F}) - 1 \;=\; p-1,$$

ce qui implique $x \in P_k^{\mathcal{F}}$. □

Quitte à modifier le choix de L_2, on peut supposer que $V \not\subset P_p^{\mathcal{F}}$. Puisque $P_0^V = V$, le lemme ci-dessus implique qu'il existe j, $0 \leq j \leq q-p$, tel que $P_{q-j}^V \subset P_p^{\mathcal{F}}$ mais $P_{q-j-p}^V \not\subset P_p^{\mathcal{F}}$. En fait, il peut y avoir plusieurs – p au plus – choix possibles de j satisfaisant cette propriété. Du fait que $P_{q-j}^V \subset P_{q-j-p}^V$, on déduit que

$$P_{q-j}^V \subset P_{q-j-p}^V \cap P_p^{\mathcal{F}}.$$

Remarquons que le choix de j implique en particulier que P_{q-j-p}^V est non vide, et donc $\rho_{q-j-p}^V \neq 0$. Une comparaison de degrés dans $\mathbb{P}^n$ nous donne

$$\rho_{q-j}^V \leq \rho_{q-j-p}^V \rho_p^{\mathcal{F}},$$

ce qui nous nous permet d'établir une limitation pour le p-ième degré polaire de $\mathcal{F}$ en fonction des degrés polaires de V. C'est le contenue du théorème suivant, qui généralise le Théorème 1 de [So1].

Théorème 6.2. *Soit $\mathcal{F}$ une distribution holomorphe singulière de dimension p de $\mathbb{P}^n$ admettant une variété analytique compacte invariante V. Alors*

$$\frac{\rho_{q-j}^V}{\rho_{q-j-p}^V} \leq \rho_p^{\mathcal{F}},$$

où j est un nombre compris entre 0 *et $q-p$ tel que $P_{q-j}^V \subset P_p^{\mathcal{F}}$ et $P_{q-j-p}^V \not\subset P_p^{\mathcal{F}}$.*

Si V est une sous-variété analytique lisse de $\mathbb{P}^n$ de dimension q, définie par l'intersection des ensembles de zéros de $n-q$ polynômes de degrés $d_1, \ldots, d_{n-q}$, alors les degrés polaires de V sont donnés par les expressions suivantes ([To] ; voir aussi [So]):

$$\rho_k^V \;=\; (d_1 \ldots d_{n-q})\, \mathcal{W}_k^{(n-q)}(d_1-1, \ldots, d_{n-q}-1),$$

où

$$\mathcal{W}_k^{(n-q)}(X_1, \ldots, X_{n-q}) \;=\; \sum_{i_1+\ldots+i_{n-q}=k} X_1^{i_1} \ldots X_{n-q}^{i_{n-q}}$$

est la fonction symmetrique complète de degré k en $n-q$ variables. Cela nous donne le corollaire suivant:

Corollaire 6.3. *Soit $\mathcal{F}$ une distribution holomorphe singulière de dimension p de $\mathbb{P}^n$ admettant une variété analytique compacte invariante V de dimension q. Si V est lisse et défini par l'intersection des ensembles de zéros de $n-q$ polynômes de degrés $d_1, \ldots, d_{n-q}$ alors*

$$\frac{\mathcal{W}_{q-j}^{(n-q)}(d_1-1, \ldots, d_{n-q}-1)}{\mathcal{W}_{q-j-p}^{(n-q)}(d_1-1, \ldots, d_{n-q}-1)} \leq \rho_p^{\mathcal{F}},$$

où j est un nombre compris entre 0 et $q-p$ tel que $P_{q-j}^V \subset P_p^{\mathcal{F}}$ et $P_{q-j-p}^V \not\subset P_p^{\mathcal{F}}$.

Dans le cas où V est une hypersuface lisse de degré d, on a alors

$$\frac{\rho_{q-j}^V}{\rho_{q-j-p}^V} = \frac{\mathcal{W}_{n-1-j}^{(1)}(d)}{\mathcal{W}_{n-1-j-p}^{(1)}(d)} = (d-1)^p.$$

On obtient donc

Corollaire 6.4. *Soit $\mathcal{F}$ une distribution holomorphe singulière de dimension p de $\mathbb{P}^n$ admettant une hypersurface invariante lisse de degré d. Alors*

$$(d-1)^p \leq \rho_p^{\mathcal{F}}.$$

En particulier, si $p=1$, on obtient

$$d \leq d_0 + 2,$$

où d_0 est le degré de $\mathcal{F}$.

Dans le cas où la variété invariante V est de même dimension que le feuilletage $\mathcal{F}$, le nombre j ci-dessus est nul. On a donc l'inclusion $P_p^V \subset V \cap P_p^{\mathcal{F}}$. Cela nous donne

Corollaire 6.5. *Soit $\mathcal{F}$ une distribution holomorphe singulière de dimension p de $\mathbb{P}^n$ admettant une variété analytique compacte invariante V de degré d et de dimension p, alors*

$$\frac{\rho_p^V}{d} \leq \rho_p^{\mathcal{F}}.$$

Exemple 6.6. Supposons que $\mathcal{F}$ soit un feuilletage de dimension 1 et de degré d_0 de $\mathbb{P}^2$ admettant une courbe analytique invariante Γ de degré d. Remarquons que, dans ce cas, $\mathrm{Sing}(\mathcal{F})$ est constitué de points isolés. On a

$$P_1^\Gamma \subset \Gamma \cap P_1^{\mathcal{F}}.$$

Comme par ailleurs, $\mathrm{Sing}(\Gamma) \subset \mathrm{Sing}(\mathcal{F})$, il vient $\mathrm{Sing}(\Gamma) \subset P_1^{\mathcal{F}}$. On conclut donc que

$$P_1^\Gamma \cup \mathrm{Sing}(\Gamma) \;\subset\; \Gamma \cap P_1^{\mathcal{F}}.$$

Par le théorème de Bézout, nous avons

$$\rho_1^\Gamma + \sum_{q \,\in\, \mathrm{Sing}\,(\Gamma)} m_q \;\le d\,\rho_1^{\mathcal{F}},$$

où m_q désigne la multiplicité de q. On a la formule suivante (voir [Pi1]):

$$\rho_1^\Gamma \;=\; d(d-1) - \sum_{q \,\in\, \mathrm{Sing}\,(\Gamma)} (\mu_q + m_q - 1),$$

où μ_q est le nombre de Milnor de Γ en $q \in \mathrm{Sing}(\Gamma)$. Puisque $\rho_1^{\mathcal{F}} = d_0 + 1$, nous obtenons

$$d(d-1) - \sum_{q \,\in\, \mathrm{Sing}\,(\Gamma)} (\mu_q - 1) \;\le\; d(d_0+1),$$

résultat prouvé par [So]. Dans le cas d'une courbe Γ avec singularités nodales, i.e. telle que $\mu_q = 1$ pour tout point $q \in \mathrm{Sing}(\Gamma)$, nous avons

$$d \;\le\; d_0 + 2,$$

inégalité obtenue par Cerveau et Lins Neto [CL].

References

[BB] P. Baum and R. Bott, *Singularities of holomorphic foliations*, J. Differential Geometry, **7** (1972), 279–342.

[BS] J.-P. Brasselet and T. Suwa, *Nash residues of singular holomorphic foliations*, Asian J. Math., **4** (2000), 37–50.

[BM] M. Brunella and L.G. Mendes, *Bounding the degree of solutions to Pfaff equations*, Publ. Mat., **44** (2000), 593–604.

[Ca] M. Carnicer, *The Poincaré problem in the nondicritical case*, Ann. of Math., **140** (1994), 289–294.

[CL] D. Cerveau and A. Lins Neto, *Holomorphic foliations in* $\mathbb{P}^2$ *having an invariant algebraic curve*, Ann. Institut Fourier **41** (4), 883–904.

[Fu] W. Fulton, *Intersection theory*, 2ème ed., Springer-Verlag, New York, 1998.

[G] X. Gomez-Mont, *Universal families of foliations by curves*, Asterisque **150–151** (1987), 109–129.

[GH] P. Griffiths and J. Harris, Principles of algebraic geometry, Wiley-Interscience, New York, 1978.

[K] M. Kwieciński, *Sur le transformé de Nash et la construction du graphe de MacPherson*, Thèse, Université de Provence, 1994.

[LT] D.T. Lê and B. Teissier, *Variétés polaires locales et classes de Chern des variétés singulières*, Ann. of Math., **114** (1981), 457–491.

[Mc] R. MacPherson, *Chern classes of singular varieties*, Ann. of Math., **100** (1974), 423–432.

[MS] R. Mol and M. Soares, *Índices de campos holomorfos e aplicações*, Publicações Matemáticas do IMPA, 23° Colóquio Brasileiro de Matemática, Rio de Janeiro, 2001.

[Pi] R. Piene, *Polar classes of singular varieties*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup., **11** (1978), 247–276.

[Pi1] R. Piene, *Cycles polaires et classes de Chern pour les variétés projectives singulières*, Travaux en Cours 37, Hermann, Paris, 1988, Introduction à la théorie des singularités, II, 7–34.

[Po] H. Poincaré, *Sur l'intégration algébrique de équations différentielles du 1er ordre et du 1er degré*, Rend. del Circ. Mat. di Palermo, **5** (1891), 161–191.

[Se] S. Sertöz, *Residues of singular holomorphic foliations*, Compositio Math., **70** (1989), 227-243.

[So] M. Soares, *Projective varieties invariant by one-dimensional foliations*, Ann. of Math., **152** (2000), 369–382.

[So1] M. Soares, *On the geometry of Poincaré's problem for one-dimensional projective foliations*, An. Acad. Bras. Cienc., **73** (2001), 475–482.

[Sc] M.-H. Schwartz, *Classes et caractères de Chern-Mather des espaces linéaires*, C. R. Acad. Sci. Paris, **295** (5) (1982), 399–402.

[Te] B. Teissier, *Cycles évanescents, sections planes et conditions de Whitney*, Astérisque **8–9**, 285–362.

[To] J.A. Todd, *The arithmetical invariants of algebraic loci*, Proc. London Mat. Soc., **43** (1937), 190–225.

[Wh] H. Whitney, *Tangents to an analytic variety*, Ann. of Math., **81** (1965), 496–549.

Rogério S. Mol
Departamento de Matemática
Universidade Federal de Minas Gerais
Av. Antônio Carlos, 6627
30123-970 Belo Horizonte, MG
BRASIL

E-mail: rmol@ufmg.br